

# Zur Hydrostatik von Inversionen

Dietmar Thaler  
E: dietmar.thaler@gmx.at

Vorversion 0.2, September 2009

Ein atmosphärisches Zweischichtenmodell mit potenzieller Kaltluft vom Boden bis zur einer bestimmten Inversionshöhe und potenzieller Warmluft oberhalb der Inversion wird hydrostatisch untersucht. Ziel ist es eine explizite Beziehung zwischen der Inversionshöhe und den davon unabhängigen Zustandsgrößen Bodenluftdruck, Luftdruck in der Höhe bzw. Geopotenzial in der Höhe sowie der potenziellen Temperatur von unterer Kaltluft und oberer Warmluft anzugeben. Damit ergibt sich ein erweitertes Verständnis über das Verhalten der Inversionshöhe in Abhängigkeit von synoptischen Temperatur- und Druckfeldern.

*A simple atmospheric two layer model with potential cold air reaching from the surface to an inversion height and potential warm air above this inversion height is investigated. The goal is an explicit relation between the inversion height and the independent variables of state surface pressure, upper level pressure (upper level geopotential resp.), cold potential temperature in the lower layer and warm potential temperature in the upper layer. Thus a deeper understanding of the behaviour of the inversion height in dependency of synoptic temperatur and pressure fields can be gained.*

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Motivation und Problem</b>	<b>2</b>
<b>2 Ansatz und Herleitungsskizze</b>	<b>3</b>
<b>3 Empfindlichkeitsanalyse und Abschätzungen</b>	<b>4</b>
<b>4 Abhängigkeit des Temperatursprungs <math>\Delta T</math> von der Differenz der potenziellen Temperaturen <math>\Delta\Theta</math></b>	<b>8</b>
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>9</b>

## 1 Motivation und Problem

Die Abschätzung über das Verhalten von Inversionen und Inversionshöhe gehört im meteorologischen Vorhersagedienst, insbesondere im flugmeteorologischen Dienst, zum täglichen Brot. Inversionen hängen mit Nebel- oder Hochnebelfelder zusammen, und sie sind Konvektionsbremsen bei der Cumulus-Entwicklung. Gleichzeitig werden Inversionen durch numerische Vorhersagemodelle oft nicht in der gewünschten Genauigkeit gezeigt, insbesondere wenn sie in der atmosphärischen Grenzschicht oder wenig darüber liegen. Die folgende Untersuchung soll ein einfaches Hilfsmittel zum besseren Verständnis über das Verhalten von Inversionshöhen bei sich ändernden atmosphärischen Grundgrößen geben.

Gegeben sei ein simples Zweischichten-Modell der Atmosphäre (Abb. 1): Kaltluft konstanter potenzieller Temperatur  $\Theta_C$  unten und Warmluft konstanter potenzieller Temperatur  $\Theta_W$  oben, wobei gilt  $\Theta_W > \Theta_C$ . Am Boden (Höhe  $z = 0$ ) herrscht der Luftdruck  $p_0$ , die dazugehörige Temperatur der Kaltluft ist hier  $T_0$ . Die Höhe der Inversion befindet sich in  $z = h_1$ , der Luftdruck beträgt  $p_1$ . Die Kaltluft ist wegen der Bedingung der konstanten potenziellen Temperatur trockenadiabatisch geschichtet, die Temperatur an der kalten Seite der Inversion lautet:

$$T_{1,C} = T_0 - \Gamma h_1 \quad (1)$$

(adiabatischer Temperaturgradient<sup>1</sup>  $\Gamma = g/c_p$ ). Für die Warmluft gilt an der Inversi-

<sup>1</sup>In der Beziehung  $\Gamma = g/c_p$  ist über ihre Herleitung aus  $\partial\Theta/\partial z = 0$  die hydrostatische Approxima-

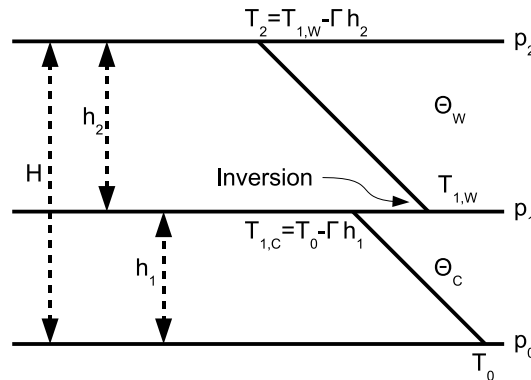


Abbildung 1: Idealisiertes Modell einer Inversion mit Kaltluft mit konstanter potenzieller Temperatur  $\Theta_C$  unten und Warmluft mit konstanter potenzieller Temperatur  $\Theta_W$  oben, wobei gilt  $\Theta_W > \Theta_C$ . Zur Vereinfachung sei die Modell-Atmosphäre trocken.

onshöhe  $z = h_1$  bzw.  $p = p_1$  die Temperatur  $T_{1,W}$ . In der Hauptdruckfläche  $p_2$  in der Höhe  $H = h_1 + h_2$  beträgt die Temperatur:

$$T_2 = T_{1,W} - \Gamma h_2 \quad (2)$$

Unter der Annahme der Beibehaltung des Zweischichtenaufbaus und des hydrostatischen Gleichgewichts mit jeweils konstantem  $\Theta_C$  bzw.  $\Theta_W$  in der entsprechenden Schicht sind nun eine Anzahl von Zustandsänderungen möglich: Änderungen der jeweiligen potenziellen Temperaturen  $\Theta_C$ ,  $\Theta_W$ , des Bodenluftdrucks  $p_0$  und des oberen Luftdrucks  $p_2$  (bzw. analog dazu die Änderung des Geopotenzials  $H$ ).

Gesucht ist nun eine Beziehung für die Inversionshöhe  $h_1$  in Abhängigkeit aller obigen Größen:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1(p_0, p_2, \Theta_C, \Theta_W) \text{ bzw.} \\ h_1 &= h_1(p_0, H, \Theta_C, \Theta_W). \end{aligned} \quad (3)$$

Die Empfindlichkeit der Inversionshöhe bezüglich Änderungen dieser Zustandsgrößen wird Gegenstand der Untersuchung sein. Zu beachten ist, dass die Ursache der Zustandsänderungen nur qualitativ und nicht umfassend behandelt wird.

## 2 Ansatz und Herleitungsskizze

Die potenzielle Temperatur von Luft (gemäß Annahme trocken) berechnet sich nach z.B. [1] zu:

$$\Theta = T \left( \frac{p_s}{p} \right)^\kappa \quad (4)$$

mit  $\kappa = R/c_p \approx 0,286$  und  $p_s = 1000 \text{ hPa}$ , wobei  $R$  die Gaskonstante trockener Luft ist und  $c_p$  die spezifische Wärme trockener Luft bei konstantem Druck.

Die potenzielle Temperatur für die Kaltluft der unteren Schicht lautet am Boden:

$$\Theta_C = T_0 \left( \frac{p_s}{p_0} \right)^\kappa, \quad (5)$$

und an der Inversion:

$$\Theta_C = T_{1,C} \left( \frac{p_s}{p_1} \right)^\kappa = (T_0 - \Gamma h_1) \left( \frac{p_s}{p_1} \right)^\kappa. \quad (6)$$

Für die potenzielle Temperatur der Warmluft der darüber liegenden Schicht gilt an der Stelle  $h_1$  bzw.  $p_1$ :

---

tion versteckt, die sonst in der hier vorliegenden Untersuchung nicht explizit verwendet wird.

$$\Theta_W = T_{1,W} \left( \frac{p_s}{p_1} \right)^\kappa. \quad (7)$$

An der Stelle  $H = h_1 + h_2$  bzw.  $p_2$  gilt:

$$\Theta_W = T_2 \left( \frac{p_s}{p_2} \right) = (T_{1,W} - \Gamma h_2) \left( \frac{p_s}{p_2} \right)^\kappa. \quad (8)$$

Aus den Beziehungen Gl. 5 und Gl. 6 auf der vorherigen Seite kann man die Bodentemperatur  $T_0$  eliminieren. Analog lässt sich aus den Beziehungen für die Warmluft Gl. 7 und Gl. 8 die Temperatur  $T_{1,W}$  eliminieren. Aus den so erhaltenen zwei Beziehungen lässt sich die Variable  $p_1$  eliminieren. Nach weiteren Umformungen erhält man eine *Beziehung für die Inversionshöhe  $h_1$*  (genaue Herleitung in Abschnitt 6 auf Seite 12) als Funktion von Bodenluftdruck  $p_0$ , potenzieller Temperatur der Kaltluft unten  $\Theta_C$ , potenzieller Temperatur der Warmluft oben  $\Theta_W$  und dem Luftdruck  $p_2$  an der oberen geopotenziellen Referenzhöhe  $H$  bzw. der geopotenziellen Höhe  $H$  an der oberen Referenzdruckfläche  $p_2$ :

$$h_1 = \left( \frac{1}{\Gamma} \frac{p_0^\kappa - p_2^\kappa}{p_s^\kappa} - \frac{H}{\Theta_W} \right) \frac{\Theta_C}{1 - \Theta_C/\Theta_W}. \quad (9)$$

Die Gleichung 9 ist eine diagnostische Beziehung. Jede Änderung von  $p_0$ ,  $p_2$  (bzw.  $H$ ),  $\Theta_C$  und  $\Theta_W$  bewirkt eine Änderung der Inversionshöhe  $h_1$ .

Da hier nur positive Inversionshöhen physikalisch relevant sind, muss zusätzlich zu  $\Theta_C < \Theta_W$  gelten:

$$h_1 > 0 \Leftrightarrow \frac{p_0^\kappa - p_2^\kappa}{\Gamma p_s^\kappa} > \frac{H}{\Theta_W}. \quad (10)$$

Weiters ist zu beachten, dass  $h_1 < H$  erfüllt ist, da sonst das Zweischichtenmodell gemäß Abb. (1) nicht mehr gegeben ist. Beide Bedingungen sind für die spätere Verwendung von Bedeutung.

### 3 Empfindlichkeitsanalyse und Abschätzungen

Das totale Differenzial der Inversionshöhe  $h_1$  lautet:

$$\delta h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial p_0} \delta p_0 + \frac{\partial h_1}{\partial p_2} \delta p_2 + \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_C} \delta \Theta_C + \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_W} \delta \Theta_W, \quad (11)$$

bzw.:

$$\delta h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial p_0} \delta p_0 + \frac{\partial h_1}{\partial H} \delta H + \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_C} \delta \Theta_C + \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_W} \delta \Theta_W. \quad (12)$$

Um obiges Differenzial zu berechnen, werden nun der Reihe nach die partiellen Ableitungen gebildet. Bequemerweise erfolgt die Berechnung mit Unterstützung eines Algebraprogramms ([2] bzw. [3]).

## Änderung der Inversionshöhe $h_1$ mit dem Bodenluftdruck

Die lokale Ableitung von  $h_1$  nach  $p_0$  lautet:

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial p_0} \right|_{p_2, H, \Theta_C, \Theta_W} = \frac{\kappa \Theta_C}{(1 - \Theta_C / \Theta_W)} \frac{p_0^{\kappa-1}}{\Gamma p_s^\kappa}. \quad (13)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. 13 ist, wie man sich leicht überzeugen kann, positiv definit. Das heißt, *ein isolierter Anstieg des Bodendruckes geht mit einem Anstieg der Inversionshöhe einher, ein Bodendruckfall mit einem Sinken der Inversionshöhe.*

## Änderung der Inversionshöhe $h_1$ mit dem Höhendruck $p_2$

Die lokale Ableitung von  $h_1$  nach  $p_2$  lautet:

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial p_2} \right|_{p_0, H, \Theta_C, \Theta_W} = - \frac{\kappa \Theta_C}{(1 - \Theta_C / \Theta_W)} \frac{p_2^{\kappa-1}}{\Gamma p_s^\kappa}. \quad (14)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. 14 ist negativ definit. Das heißt, *ein isolierter Anstieg des Höhendruckes geht mit einem Sinken der Inversionshöhe einher, ein Druckfall in der Höhe mit einem Steigen der Inversionshöhe.*

## Änderung der Inversionshöhe $h_1$ mit der oberen geopotenziellen Höhe $H$

Die lokale Ableitung von  $h_1$  nach  $H$  lautet:

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial H} \right|_{p_0, p_2, \Theta_C, \Theta_W} = - \frac{\Theta_C / \Theta_W}{1 - \Theta_C / \Theta_W} \quad (15)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. 15 ist negativ definit. Das heißt, *ein isolierter Anstieg des Geopotenzial in der Höhe geht mit einem Sinken der Inversionshöhe einher, ein Sinken des Geopotenzial in der Höhe mit einem Steigen der Inversionshöhe.* Verglichen mit Gl. 14 ist Gl. 15 einfacher auszuwerten.

## Änderung des gesamten Luftdruckes oben und unten um den gleichen Betrag

Eine isolierte Luftdruckänderung im oberen Niveau ohne Luftdruckänderung am Boden ist meteorologisch weniger leicht realisierbar. Naheliegender ist als Sonderfall die Annahme, dass eine Massenänderung mit der Höhe in gleichem Betrag auch am Boden erfolgt:

$$\delta p_0 = \delta p_2 = \delta p.$$

Damit kann man bei konstanten  $\Theta_C$ ,  $\Theta_W$  und  $H$  die Änderung der Inversionshöhe  $\delta h_1$  wie folgt anschreiben:

$$\delta h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial p_0} \delta p_0 + \frac{\partial h_1}{\partial p_2} \delta p_2 = \left. \frac{\delta h_1}{\delta p} \right|_{\Theta_C, \Theta_W, H} \delta p.$$

Einsetzen der Gleichungen 13 und 14 ergibt:

$$\left. \frac{\delta h_1}{\delta p} \right|_{\Theta_C, \Theta_W, H} = - \frac{\kappa \Theta_C}{p_s^\kappa \Gamma(1 - \Theta_C/\Theta_W)} (p_2^{\kappa-1} - p_0^{\kappa-1}). \quad (16)$$

Wegen  $\Theta_W > \Theta_C$ ,  $p_0 > p_2$  und  $\kappa - 1 < 0$  (negativer Exponent) folgt unmittelbar

$$\left. \frac{\delta h_1}{\delta p} \right|_{\Theta_C, \Theta_W} < 0.$$

Das heißt, *ein synchroner Anstieg des Höhenluftdruckes und des Bodenluftdruckes geht einher mit einem Sinken der Inversionshöhe, ein synchroner Druckfall mit einem Steigen der Inversionshöhe.*

## Änderung der Inversionshöhe $h_1$ mit der potenziellen Kaltluft $\Theta_C$

Die lokale Ableitung von  $h_1$  nach  $\Theta_C$  lautet:

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_C} \right|_{p_0, p_2, H, \Theta_W} = \left( \frac{1}{1 - \Theta_C/\Theta_W} \right)^2 \left( \frac{p_0^\kappa - p_2^\kappa}{\Gamma p_s^\kappa} - \frac{H}{\Theta_W} \right). \quad (17)$$

Über das Vorzeichen dieses Ausdrucks ist eine gesonderte Untersuchung erforderlich.

Der erste quadrierte Klammerausdruck ist auf jeden Fall positiv definit. Der zweite Klammerausdruck ist aber wegen der Bedingung  $h_1 > 0$  (Beziehung 10 auf Seite 4) positiv. Daher gilt: *Eine Erwärmung der Kaltluft unterhalb der Inversion geht einher mit einem Steigen der Inversionshöhe, eine Abkühlung unterhalb der Inversion mit einem Sinken der Inversionshöhe.*

## Änderung der Inversionshöhe $h_1$ mit der potenziellen Warmluft $\Theta_W$

Die lokale Ableitung von  $h_1$  nach  $\Theta_W$  lautet:

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_W} \right|_{p_0, p_2, H, \Theta_C} = \frac{\Theta_C H}{(1 - \Theta_C/\Theta_W) \Theta_w^2} - \frac{\Theta_C^2 \left( \frac{p_0^\kappa - p_2^\kappa}{\Gamma p_s^\kappa} - \frac{H}{\Theta_W} \right)}{(1 - \Theta_C/\Theta_W)^2 \Theta_w^2}. \quad (18)$$

Diese Beziehung kann mit der Gleichung für  $h_1$  (Gl. 9) umgewandelt werden zu

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_W} \right|_{p_0, p_2, H, \Theta_C} = \frac{\Theta_C}{(1 - \Theta_C/\Theta_W) \Theta_w^2} (H - h_1). \quad (19)$$

Weil nur bei  $H > h_1$  die Grundannahme des Zweischichtenmodells erfüllt ist, folgt, dass die linke Seite der obigen Beziehungen stets positiv ist. Daher gilt: *Eine Erwärmung der Warmluft oberhalb der Inversion geht einher mit einem Steigen der Inversionshöhe, eine Abkühlung oberhalb der Inversion mit einem Sinken der Inversionshöhe* (bei konstanten übrigen Variablen).

## Abschätzung der Größenordnung der Änderungsraten

Tabelle 1 gibt für plausibel erscheinende Testdaten eine Abschätzung der Größenordnung der Änderungsraten. Bemerkenswert ist die hohe Empfindlichkeit der Inversionshöhe gegenüber Änderungen der Zustandsvariablen.

Ein Anstieg des Bodenluftdrucks  $p_0$  um 1 hPa bedeutet einen Anstieg der Inversion von 1227 m auf ca. 1380 m. Um diesen zu kompensieren genügt allerdings ein Anstieg des Luftdruckes in der Höhe um weniger als 1 hPa. Ein gemeinsamer gleichgroßer Luftdruckanstieg um 1 hPa in der Höhe und am Boden bedeutet ein Sinken der Inversionshöhe um etwa ein Viertel der Größe der isolierten Wirkung der Höhendruckänderung.

Ähnliche Empfindlichkeiten ergeben sich für Variationen der potenziellen Temperaturen  $\Theta_C$  und  $\Theta_W$ .

Größe	Symbol	Wert	Einheit
Bodenluftdruck	$p_0$	1020	hPa
Luftdruck oben	$p_2$	700	hPa
Höhe des oberen Druckniveaus	$H$	3000	gpm
Potenzielle Temperatur der unteren Schicht	$\Theta_C$	277	K
Potenzielle Temperatur der oberen Schicht	$\Theta_W$	292	K
<b>Höhe der Inversion</b>	$h_1$	1227	<b>gpm</b>
Lokale Änderungen	$\partial h_1 / \partial p_0$	156	gpm/hPa
	$\partial h_1 / \partial p_2$	-204	gpm/hPa
	$\partial h_1 / \partial H$	-18,5	gpm/gpm
	$\partial h_1 / \partial \Theta_C$	86	gpm/K
	$\partial h_1 / \partial \Theta_W$	112	gpm/K
unter der Annahme $\delta p_0 = \delta p_2 = \delta p$ : $\delta h_1 / \delta p =$	$\partial h_1 / \partial p_0 + \partial h_1 / \partial p_2$	-48	gpm/hPa

Tabelle 1: Abschätzung der Inversionshöhe und ihrer Empfindlichkeit bezüglich der Änderung der Zustandsvariablen für eine Testatmosphäre (mit  $\kappa = 0,286$  und  $\Gamma = 0,977$  K/100 gpm).

## Grenzbedingung für Luftdruckänderungen

Aus der Bedingung  $h_1 \geq 0$  gemäß Beziehung 10 auf Seite 4 folgt unmittelbar:

$$p_0 \geq \sqrt{\kappa p_2^\kappa + \Gamma p_s^\kappa} \frac{H}{\Theta_W}.$$

Die Funktion

$$p_{0,\text{lim}} = \sqrt[\kappa]{p_2^\kappa + \Gamma p_s^\kappa \frac{H}{\Theta_W}} \quad (20)$$

bezeichnet dann jenen Bodenluftdruck  $p_0$ , der bei gegebenem  $p_2$ ,  $H$  und  $\Theta_W$  nicht unterschritten werden kann, wenn die Inversion mit der darunterliegenden Kaltluft noch bestehen soll. Die Abbildung 2 zeigt für das gegebene Niveau  $H = 3000\text{ m}$  und verschiedene Werte  $\Theta_W$  der potenziellen Warmluft Kurvenscharen für den entsprechenden Schwellwert des Bodenluftdrucks als Funktion des Luftdruckes in der Höhe  $H$ . Zulässige Wertepaare für die Luftdrücke  $p_0$  und  $p_2$  müssen sich oberhalb des betreffenden Kurvenzuges befinden.

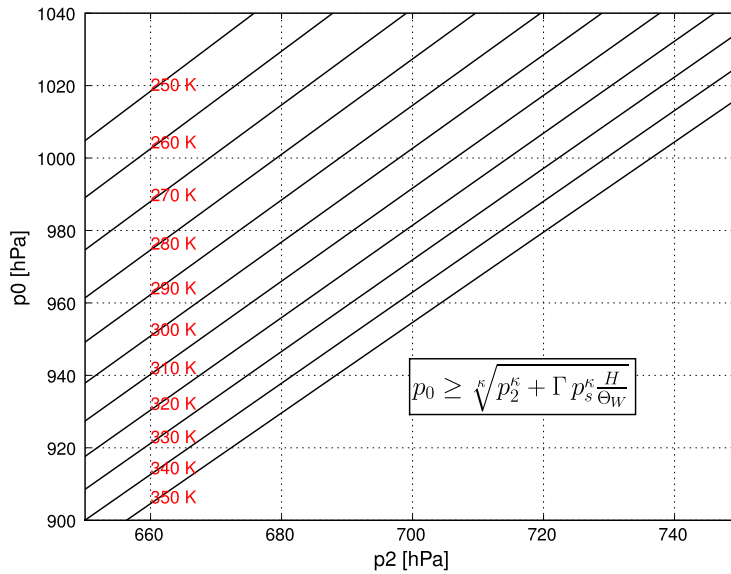


Abbildung 2: Darstellung der aus  $h_1 = 0$  folgende Funktion  $p_{0,\text{lim}}$  (Ordinate) für den Luftdruck  $p_2$  (Abszisse) in der Höhe  $H = 3000\text{ m}$  und die jeweilige potenzielle Temperatur  $\Theta_W$  (Beschriftung der Werte an den Kurven). Näheres im Text.

#### 4 Abhängigkeit des Temperatursprungs $\Delta T$ von der Differenz der potenziellen Temperaturen $\Delta\Theta$

Der Vollständigkeit halber ein Nebenthema: Neben der Charakterisierung der Inversion durch die Differenz der potenziellen Temperaturen  $\Theta_W - \Theta_C = \Delta\Theta$  ist für viele Belange die Temperaturdifferenz  $T_{W,1} - T_{C,1} = \Delta T$  an der Inversion  $h_1$  bzw.  $p_1$  von Interesse.



Es gilt gemäß der Definitionsbeziehung für die potenzielle Temperatur Gl. 4 auf Seite 3 und der Bezeichnungen gemäß Abbildung 1 auf Seite 2:

$$\Delta\Theta = \Theta_W - \Theta_C = (T_w - T_C) \left( \frac{p_s}{p_1} \right)^\kappa$$

bzw.

$$\Delta T = \Delta\Theta \left( \frac{p_1}{p_s} \right)^\kappa.$$

Daraus folgt nun für die Änderungsrate der Temperaturdifferenz bezüglich der Differenz der potenziellen Temperatur in Abhängigkeit vom Druck an der Inversionshöhe:

$$\frac{\Delta T}{\Delta\Theta} = \left( \frac{p_1}{p_s} \right)^\kappa \quad (21)$$

Das heißt, bei gegebenem  $\Delta\Theta$  ist die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  an der Inversion umso größer, je größer der Druck an der Inversion ist, d.h. in der Regel je tiefer die Inversion ist. Das bedeutet, dass bei sinkenden Inversionen die Temperaturdifferenz bei sonst gleicher potenzieller Temperaturdifferenz zunimmt (vergl. Abb. 3 auf der nächsten Seite). Die Änderungsrate variiert für den Höhen- und Druckbereich von etwa 4 km Höhe bis zum Boden jedoch nur wenig<sup>2</sup>.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Ergebnisse seien nun zusammengefasst.

1. Ein isolierter Anstieg des Bodenluftdrucks geht einher mit einem Steigen der Inversionshöhe, ein Sinken des Bodendrucks mit einem Sinken der Inversionshöhe.
2. Ein isolierter Anstieg des Höhenluftdrucks (Hebung des Geopotenzials in der Höhe) geht einher mit einem Sinken der Inversionshöhe, ein isoliertes Sinken des Höhenluftdrucks (Sinken des Geopotenzials in der Höhe) mit einem Steigen der Inversionshöhe.
3. Ein synchron steigender Boden- und Höhendruck (d.h. Massenzunahme in der Höhe) bei sonst konstanten potenziellen Temperaturen bedeutet ein Sinken der Inversionshöhe, ein synchron sinkender Boden- und Höhenluftdruck bedeutet ein Steigen der Inversionshöhe.
4. Eine potenzielle Temperaturzunahmen in der unteren Kaltluft und/oder in der oberen Warmluft bei sonst konstantem Druck (bzw. Geopotenzial) am Boden und in der Höhe bedeutet ein Steigen der Inversionshöhe, eine potenzielle Temperaturabnahme in der unteren Kaltluft und/oder in der oberen Warmluft bedeutet ein Sinken der Inversionshöhe.

<sup>2</sup>Die Variation ist keineswegs so stark, wie der für diesen Zusammenhang oft geltend gemachte Begriff „Absinkinversion“ suggeriert.

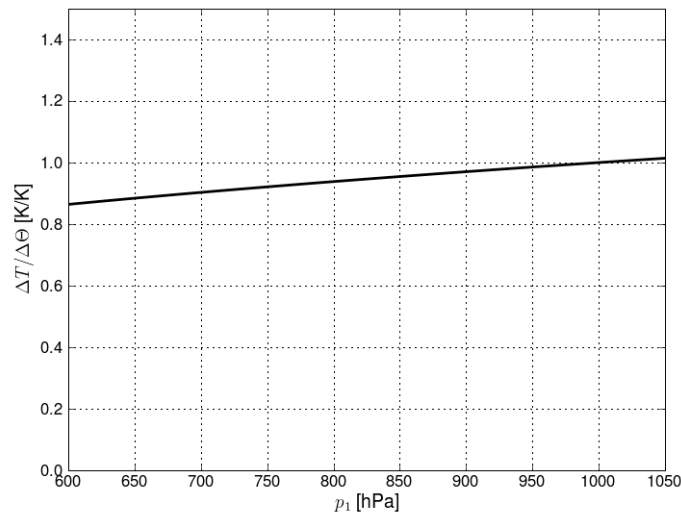


Abbildung 3: Änderungsrate der Temperaturdifferenz mit der Differenz der potenziellen Temperatur  $\Delta T/\Delta\Theta$  in Abhängigkeit vom Druck  $p_1$  an der Inversionshöhe  $h_1$ .

Die meteorologische Relevanz der Punkte 1 bis 4 muss unterschiedlich beurteilt werden.

Punkt 1 kann dann erfüllt sein, wenn es zu einer bodennahen Massenzunahme (Massenabnahme) durch bodennahe Strömungskonvergenz (Strömungsdivergenz) kommt. Vorstellbar wäre eine orographisch erzwungenen Konvergenz im Luv eines Hindernisses bzw. in Richtung eines enger werdenden Tales, die zum Aufwölben der bodennahen Kaltluft führt. Analog ist Divergenz im Lee eines Hindernisses bzw. in Richtung eines sich weitenden Tales möglich. Die Konstanz der potenziellen Temperaturen ist in Abwesenheit diabatischer Änderungen plausibel.

Eine Realisierung des in Punkt 2 geschilderten Prozesses ist meteorologisch schwerer vorstellbar. Denkbar ist eine synoptische Druckänderung in der Höhe, die durch gleichzeitiges Ausfließen oder Einfließen der darunter liegenden Kaltluft kompensiert wird. Reizvoll ist die Vorstellung eines im unteren Bereich abgeschlossenen Tales oder Kessels mit stagnierender, das heißt am Ausströmen gehinderter, Kaltluft. Sinkt z.B. der Luftdruck an einem Ende des Tales in der Höhe, dann wird die Kaltluft unter der Inversion dazu neigen, dort hin zu schwappen. Damit steigt hier die Inversionshöhe, während sie am anderen Ende sinkt. So wird der Bodendruckgradient wieder ausgeglichen, die Kaltluft bleibt stagnierend<sup>3</sup> (vergleiche Abb. 4 auf der nächsten Seite).

<sup>3</sup>Eine genauere Analyse müsste ergeben, dass die Kaltluft wegen des Aufbaus einer Solenoidalbeschleunigung innerhalb der Kaltluft vertikal etwas zirkuliert, und nur im Mittel in Ruhe ist.

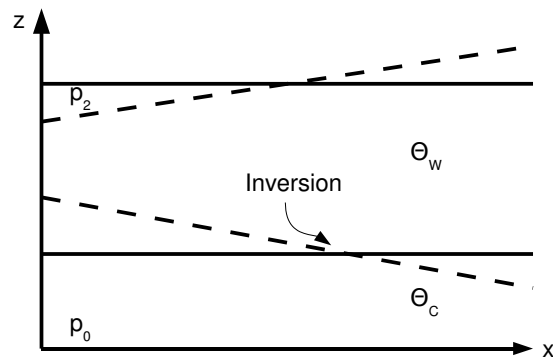


Abbildung 4: Skizze einer stagnierenden bodennahen Kaltluft im Tal (liniert), die von einer Seite hier in ein Druckfallgebiet in oberen Niveaus kommt, und das dadurch erzwungene Aufkommen eines Bodendruckgradienten durch einen gegenläufigen Gradienten in der Inversionshöhe kompensiert (gestrichelt).

Die synchrone Druckänderung gemäß Punkt 3 auf Seite 9 ist meteorologisch am plausibelsten. Der Druckanstieg (Druckfall) in der Höhe schlägt unverändert am Boden durch, damit sinkt (steigt) die Höhe der Inversion, wenngleich mit einer deutlich geringeren Rate als im Fall der isolierten Druckänderung in der Höhe.

Zu Punkt 4 auf Seite 9: Eine Erwärmung (Abkühlung) der bodennahen Kaltluft bewirkt eine Erhöhung (Sinken) der Inversionshöhe, weil wärmere Luft mehr (weniger) „Platz“ braucht. Kniffliger ist die Frage, warum ein Anstieg der Warmluft in der Höhe ebenfalls einen Anstieg der Inversionshöhe bewirkt. Der Grund liegt in der angenommenen Konstanz von Höhendruck, Bodendruck und potenzieller Kaltluft. Da in der Warmluft der Druck nach der weiteren Erwärmung mit der Höhe langsamer abnimmt als vor der Erwärmung, im oberen Niveau aber unverändert der alte Höhenluftdruck erreicht werden muss, kann das nur durch eine positive Höhenänderung der darunter liegenden Kaltluft erreicht werden (in der die Druckabnahme mit der Höhe rascher erfolgt). Analog kehren sich die Vorzeichen bei einer Abkühlung in der Höhe um.

Die Wirklichkeit ist komplexer als die oben geschilderten mehr oder weniger isoliert betrachteten Prozesse suggerieren. Man betrachte nur den klassischen Fall eines herein wandernden Hochs, das den Luftdruck sowohl in der Höhe als auch am Boden steigen lässt. Gemäß Beziehung 16 auf Seite 6 bzw. dem Punkt 3 auf Seite 9 sollte die Inversion sinken. Gleichzeitig ist das hereinziehende Hoch aber auch mit Erwärmung in der Höhe verbunden, dies wirkt dem Sinken entgegen. Das tatsächliche Ausmaß des Sinkens der Inversion ist also unsicher.

Darüber hinaus ist das Zweischichtenmodell selbst nur eine Idealisierung, ebenso wie die Annahme konstanter potenzieller Temperatur in den einzelnen Schichten. Eine Verallgemeinerung könnte ein Modell darstellen, in dem die Atmosphäre beliebig genau durch eine Säule einer großen Zahl adiabatisch durchmischter Schichten aufgebaut wird.

Ausstehend ist auch eine einfache Fallstudie, in der an Hand realer Inversionen die grundsätzliche konzeptionelle Anwendbarkeit des geschilderten Zweischichtenmodell überprüft wird.

Eine Dynamik von Inversionen entspricht im Rahmen der hydrostatischen Approximation einer Dynamik geneigter Frontflächen im unteren synoptischen Scale bzw. im oberen Meso-Scale. Dazu existiert eine Fülle an Literatur. Diese wäre auf Anwendbarkeit für das hier geschilderte Problem zu sichten.

## 6 Ausführliche Herleitung und Nebenrechnungen

### Herleitung von $h_1$

Aus Gl. 5 und Gl. 6 folgt:

$$T_0 = \Theta_C \left( \frac{p_0}{p_s} \right)^\kappa \quad \text{sowie} \quad (22)$$

$$T_0 - \Gamma h_1 = \Theta_C \left( \frac{p_1}{p_s} \right)^\kappa \quad \text{bzw.}$$

$$T_0 = \Gamma h_1 + \Theta_C \left( \frac{p_1}{p_s} \right)^\kappa \quad (23)$$

Wegen Gl. 22 = Gl. 23 kann man schreiben:

$$\Theta_C \left( \frac{p_0}{p_s} \right)^\kappa = \Gamma h_1 + \Theta_C \left( \frac{p_1}{p_s} \right)^\kappa$$

bzw.

$$h_1 = \frac{\Theta_C}{\Gamma p_s^\kappa} (p_1^\kappa - p_2^\kappa). \quad (24)$$

Damit hat man bereits einen Ausdruck für die Inversionshöhe. Allerdings tritt darin noch der Luftdruck an der Inversion  $p_1$  auf, der ja unbekannt ist. Es wird daher noch eine weitere Beziehung zur Elimination von  $p_1$  benötigt.

Aus den Gl. 7 und 8 folgt:

$$T_{1,W} = \Theta_W \left( \frac{p_1}{p_s} \right)^\kappa \text{ sowie} \quad (25)$$

$$T_{1,W} - \Gamma h_2 = \Theta_W \left( \frac{p_2}{p_s} \right)^\kappa \text{ bzw.}$$

$$T_{1,W} = \Gamma h_2 + \Theta_W \left( \frac{p_2}{p_s} \right)^\kappa. \quad (26)$$

Aus Gl. 25 = Gl. 26 ergibt sich ein Ausdruck für  $h_2$ :

$$\begin{aligned} \Gamma h_2 + \Theta_W \left( \frac{p_2}{p_s} \right)^\kappa &= \Theta_W \left( \frac{p_1}{p_s} \right)^\kappa \\ h_2 &= \frac{\Theta_W}{\Gamma p_s^\kappa} (p_1^\kappa - p_2^\kappa) \end{aligned} \quad (27)$$

Aus den bisherigen Beziehungen für  $h_1$  und  $h_2$  kann nun  $p_1$  bzw.  $p_1^\kappa$  eliminiert werden. Aus Gleichung 24 auf der vorherigen Seite:

$$\begin{aligned} h_1 \frac{\Gamma p_s^\kappa}{\Theta_C} &= p_0^\kappa - p_1^\kappa \\ p_1^\kappa &= p_0^\kappa - h_1 \frac{\Gamma p_s^\kappa}{\Theta_C}. \end{aligned} \quad (28)$$

Aus Gleichung 27:

$$\begin{aligned} h_2 \frac{\Gamma p_s^\kappa}{\Theta_W} &= p_1^\kappa - p_2^\kappa \\ p_1^\kappa &= p_2^\kappa + h_2 \frac{\Gamma p_s^\kappa}{\Theta_W}. \end{aligned} \quad (29)$$

Mit Gl. 28 = Gl. 29 erhält man:

$$p_0^\kappa - h_1 \frac{\Gamma p_s^\kappa}{\Theta_C} = p_2^\kappa + h_2 \frac{\Gamma p_s^\kappa}{\Theta_W}.$$

Mit  $h_2 = H - h_1$  folgt daraus:

$$p_0^\kappa - h_1 \frac{\Gamma p_s^\kappa}{\Theta_C} = p_2^\kappa + H \frac{\Gamma p_s^\kappa}{\Theta_W} - h_1 \frac{\Gamma p_s^\kappa}{\Theta_W}.$$

$h_1$  auf die linke Seite:

$$h_1 = \frac{(p_0^\kappa - p_2^\kappa) - H \frac{\Gamma p_s^\kappa}{\Theta_W}}{\Gamma p_s^\kappa \left( \frac{1}{\Theta_W} - \frac{1}{\Theta_C} \right)}.$$

Weiter erhält man mit elementaren Umformungen<sup>4</sup> die Höhe der Inversion  $h_1$  als Funktion von Bodenluftdruck  $p_0$ , potenzieller Temperatur der Kaltluft unten  $\Theta_C$ , potenzieller Temperatur der Warmluft oben  $\Theta_W$  und dem Luftdruck  $p_2$  an der oberen geopotenziellen Referenzhöhe  $H$  bzw. der geopotenziellen Höhe  $H$  an der oberen Referenzdruckfläche  $p_2$ :

$$h_1 = \left( \frac{1}{\Gamma} \frac{p_0^\kappa - p_2^\kappa}{p_s^\kappa} - \frac{H}{\Theta_w} \right) \frac{\Theta_C}{1 - \Theta_C/\Theta_W}.$$

### Details zu den lokalen Änderungen $\partial h_1/\partial(\Theta_C, \Theta_W)$

**Die lokale Ableitung von  $h_1$  nach  $\Theta_C$  lautet:**

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_C} \right|_{p_0, p_2, H, \Theta_W} = \left( \frac{1}{1 - \Theta_C/\Theta_W} \right)^2 \frac{\Theta_C}{\Theta_W} \left( \frac{p_0^\kappa - p_2^\kappa}{\Gamma p_s^\kappa} - \frac{H}{\Theta_W} \right) + \left( \frac{1}{1 - \Theta_C/\Theta_W} \right) \left( \frac{p_0^\kappa - p_2^\kappa}{\Gamma p_s^\kappa} - \frac{H}{\Theta_W} \right).$$

Daraus folgt durch Herausheben:

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_C} \right|_{p_0, p_2, H, \Theta_W} = \left( \frac{\Theta_C}{\Theta_W (1 - \Theta_C/\Theta_W)} + 1 \right) \frac{(p_0^\kappa - p_2^\kappa) / (\Gamma p_s^\kappa) - H/\Theta_W}{1 - \Theta_C/\Theta_W}.$$

Der erste Klammerausdruck auf der linken Seite lässt sich weiter umformen zu:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Theta_C}{\Theta_W (1 - \Theta_C/\Theta_W)} + 1 \right) &= \left( \frac{\Theta_C}{\Theta_W - \Theta_C} + \frac{\Theta_W - \Theta_C}{\Theta_W - \Theta_C} \right) = \\ &= \frac{\Theta_W}{\Theta_W - \Theta_C} = \frac{\Theta_W}{\Theta_W (1 - \Theta_C/\Theta_W)} = \frac{1}{1 - \Theta_C/\Theta_W}. \end{aligned}$$

Damit folgt unmittelbar Gl. 17:

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_C} \right|_{p_0, p_2, H, \Theta_W} = \left( \frac{1}{1 - \Theta_C/\Theta_W} \right)^2 \left( \frac{p_0^\kappa - p_2^\kappa}{\Gamma p_s^\kappa} - \frac{H}{\Theta_W} \right).$$

**Die lokale Ableitung von  $h_1$  nach  $\Theta_W$  lautet:**

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_W} \right|_{p_0, p_2, H, \Theta_C} = \frac{\Theta_C H}{(1 - \Theta_C/\Theta_W) \Theta_w^2} - \frac{\Theta_C^2 \left( \frac{p_0^\kappa - p_2^\kappa}{\Gamma p_s^\kappa} - \frac{H}{\Theta_W} \right)}{(1 - \Theta_C/\Theta_W)^2 \Theta_w^2}.$$

Durch Herausheben von

$$\frac{\Theta_C}{(1 - \Theta_C/\Theta_W) \Theta_w^2}$$

<sup>4</sup> $1/(1/\Theta_C - 1/\Theta_W) = \Theta_C/(\Theta_C(1/\Theta_C - 1/\Theta_W)) = \Theta_C/(1 - \Theta_C/\Theta_W)$

erhält man

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_W} \right|_{p_0, p_2, H, \Theta_C} = \frac{\Theta_C}{(1 - \Theta_C/\Theta_W) \Theta_w^2} \left[ H - \underbrace{\frac{\Theta_C \left( \frac{p_0^\kappa - p_2^\kappa}{\Gamma p_s^\kappa} - \frac{H}{\Theta_W} \right)}{1 - \Theta_C/\Theta_W}} \right].$$

Der mit der nach unten weisenden geschwungenen Klammer markierte Term stellt aber gemäß Gl. 9 auf Seite 4 genau die Inversionshöhe  $h_1$  dar, somit:

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial \Theta_W} \right|_{p_0, p_2, H, \Theta_C} = \frac{\Theta_C}{(1 - \Theta_C/\Theta_W) \Theta_w^2} (H - h_1),$$

was genau die Beziehung 19 auf Seite 6 ergibt.

## Symbole

Symbol	Beschreibung
$\Theta_C$	Potenzielle Temperatur der unteren Kaltluft
$\Theta_W$	Potenzielle Temperatur der oberen Warmluft
$h_1$	geopotenzielle Höhe vom Boden zur Inversion [gpm]
$h_2$	geopotenzielle Höhe von der Inversion zur Hauptdruckfläche [gpm]
$H = h_1 + h_2$	geopotenzielle Höhe der des Druckniveaus $p_2$ [gpm]
$p_s$	Referenzdruck (= 1000 hPa)
$p_0$	Luftdruck am Boden [hPa]
$p_1$	Luftdruck in der Inversionshöhe $h_1$ [hPa]
$p_2$	Luftdruck in der geopotenziellen Höhe $H$ oberhalb der Inversion [hPa]
$\Gamma = g/c_p$	trockenadiabatischer Temperaturgradient $\Gamma \approx 0,977 \text{ K}/100 \text{ gpm}$
$\kappa = R/c_p$	trockenadiabatischer Koeffizient $\kappa \approx 0,286$
$g$	Schwerbeschleunigung $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$
$c_p$	spezifische Wärme trockener Luft bei konstanten Druck $c_p \approx 1004 \text{ J}/(\text{kg K})$
$R$	Gaskonstante trockener Luft $R \approx 287 \text{ J}/(\text{kg K})$

## Abbildungsverzeichnis

- 1 Idealisiertes Modell einer Inversion mit Kaltluft mit konstanter potenzieller Temperatur  $\Theta_C$  unten und Warmluft mit konstanter potenzieller Temperatur  $\Theta_W$  oben, wobei gilt  $\Theta_W > \Theta_C$ . Zur Vereinfachung sei die Modell-Atmosphäre trocken. . . . . 2
- 2 Darstellung der aus  $h_1 = 0$  folgende Funktion  $p_{0,\text{lim}}$  (Ordinate) für den Luftdruck  $p_2$  (Abszisse) in der Höhe  $H = 3000 \text{ m}$  und die jeweilige potenzielle Temperatur  $\Theta_W$  (Beschriftung der Werte an den Kurven). Näheres im Text. . . . . 8

3	Änderungsrate der Temperaturdifferenz mit der Differenz der potenziellen Temperatur $\Delta T/\Delta\Theta$ in Abhängigkeit vom Druck $p_1$ an der Inversionshöhe $h_1$ . . . . .	10
4	Skizze einer stagnierenden bodennahen Kaltluft im Tal (liniert), die von einer Seite hier in ein Druckfallgebiet in oberen Niveaus kommt, und das dadurch erzwungene Aufkommen eines Bodendruckgradienten durch einen gegenläufigen Gradienten in der Inversionshöhe kompensiert (gestrichelt). . . . .	11

## Literatur

- [1] Etling, Dieter: Theoretische Meteorologie: Eine Einführung. - 2.Aufl. - Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Tokyo: Springer 2002.
- [2] Maxima 5.13.0, <http://maxima.sourceforge.net>. Distributed under the GNU Public License. Dedicated to the memory of William Schelter.
- [3] wxMaxima ist eine wxWidgets Bedienoberfläche für das Computer Algebra System MAXIMA, Version: 0.7.1. Lizenz: GPL. <http://wxmaxima.sourceforge.net>.